

# DEA MODELÝ HODNOTENIA EFEKTÍVNOSTI VO VEREJNOM SEKTORE

**Eduard Nežinský**

- Katedra hospodárskej politiky, EU v Bratislave
- Prognostický ústav CSPV SAV

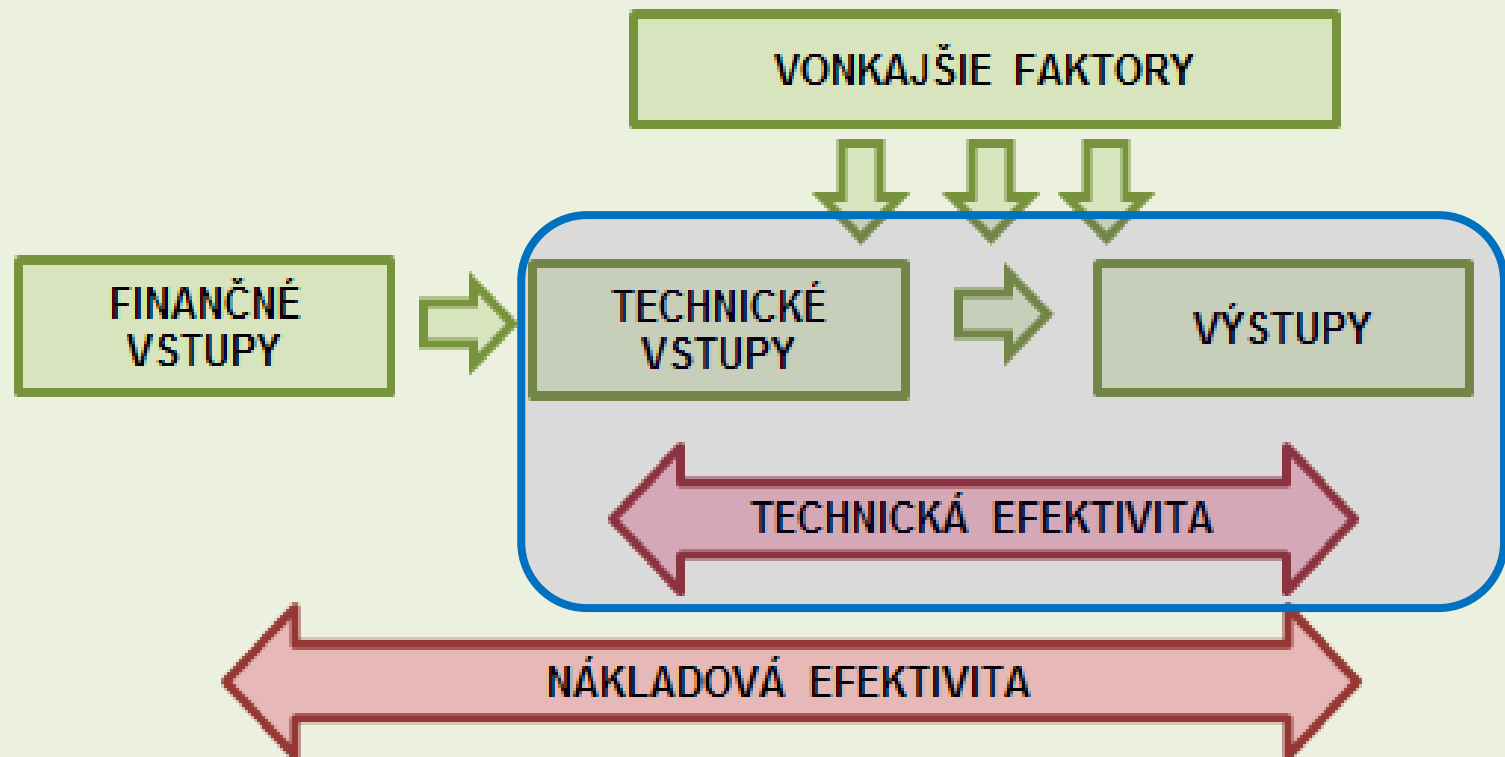
online Festival analytických jednotiek, 18.03. 2021

# OBSAH

- **Efektívnosť: motivácia a meranie**
- **DEA: základný (teoretický) CCR model**
- **Konštrukcia modelu a príklady použitia (SR)**
- **Medzičasová analýza**
- **Praktické aspekty modelovania**
- **Modifikácie, rozšírenia**
- **Diskusia**

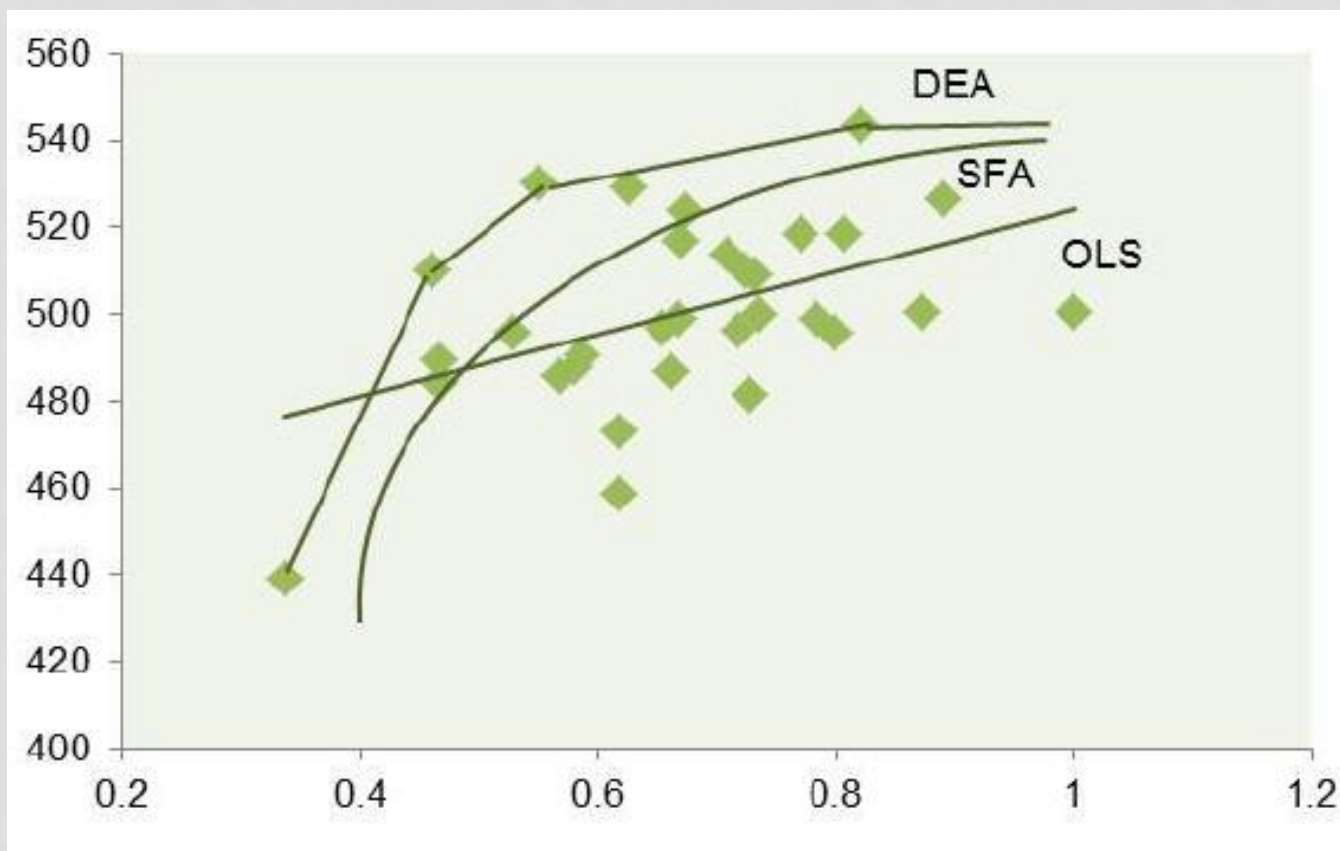
# Efektívnosť

- kritérium hodnotenia [ÚHP]



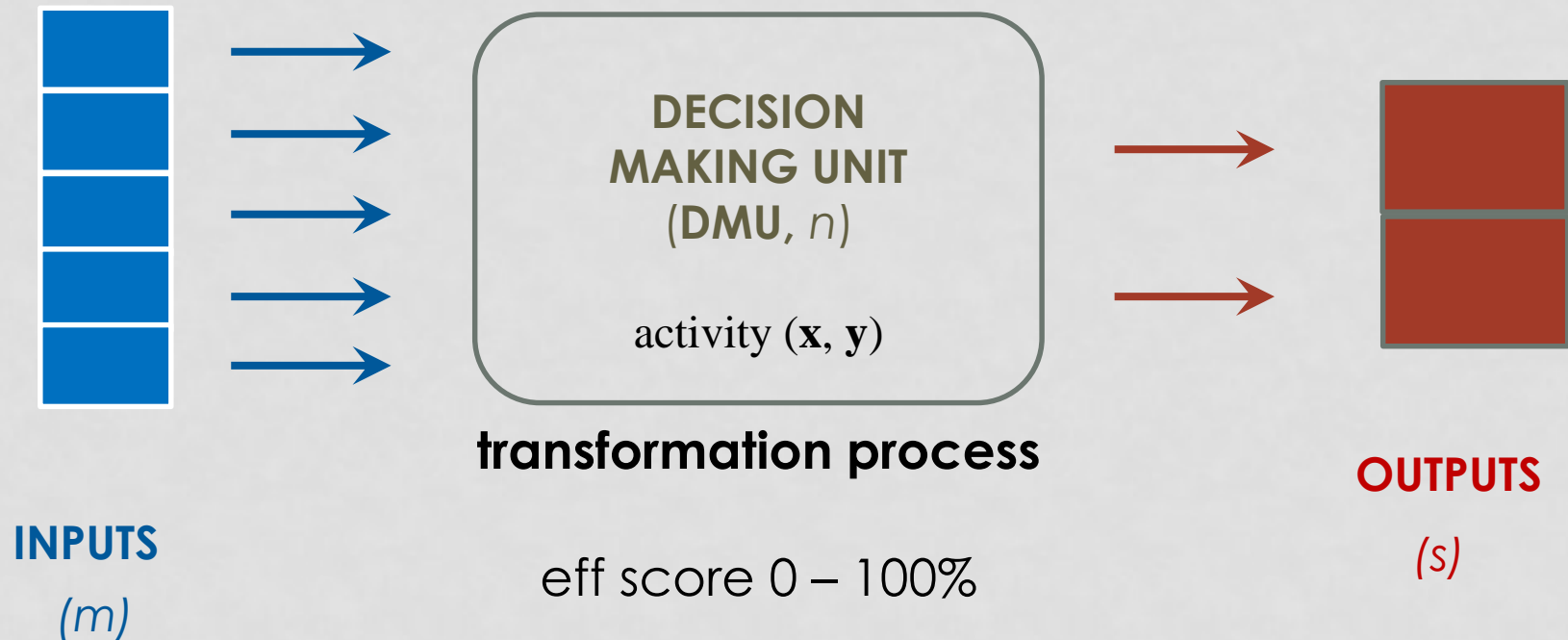
# Efektívnosť: metódy hodnotenia

- Prínosy / Náklady
- CBA, CEA, CUA, referencovanie ... , DEA, SFA

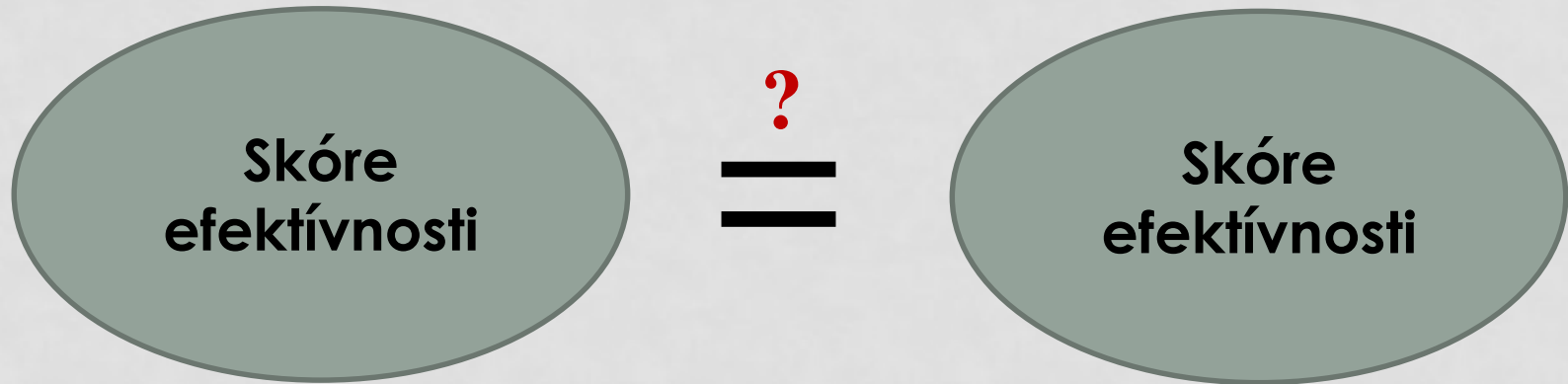


# Efficiency evaluation

$$\text{eff} = \text{„outputs“} / \text{„inputs“}$$



# Hodnotenie efektívnosti



**“MULTIPLIKÁTOR”**

**“OBAL”**

# Technická a alokačná efektívnosť

## *efektívnosť*

- **DMU** = *Decision Making Unit*:  
nezávislé rozhodovanie o **x** a **y** [aktivita (**x**, **y**)]
- používajú jednu technológiu: transformácia vstupov na výstupy

*Čo všetko môže byť v úlohe DMU?*

*produktivita = efektívnosť ??*

~~efektivita~~ / **efektívnosť**

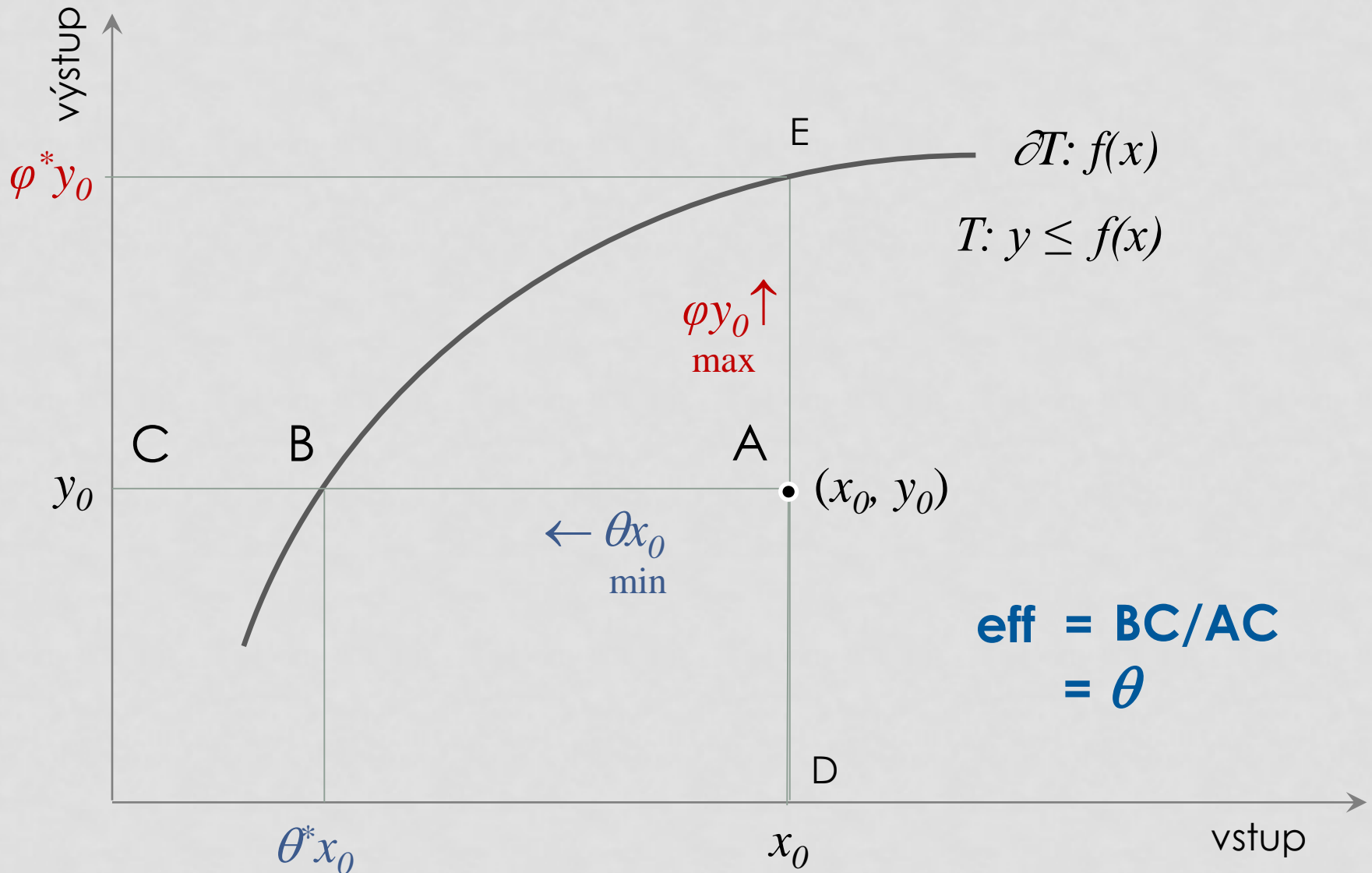
die Effektivität / die Effizienz

effectiveness / efficacy // efficiency

**“Being effective is about doing the right things, while being efficient is about doing the things in the right manner.”**

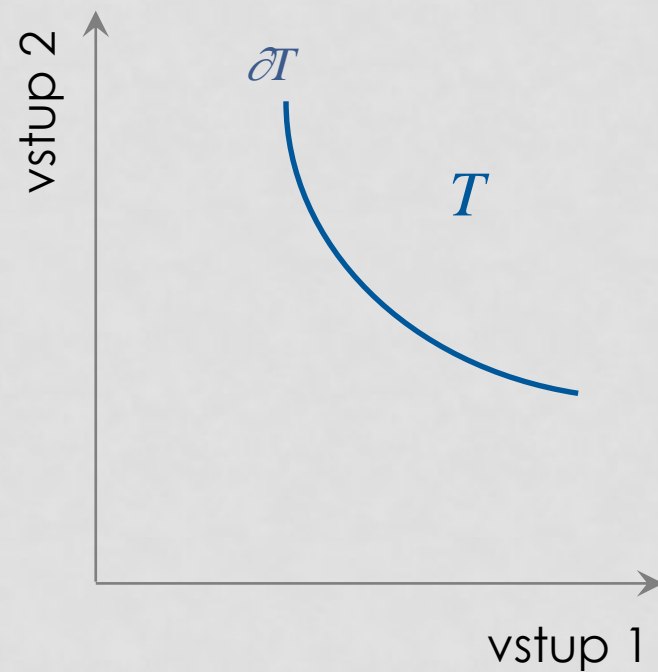
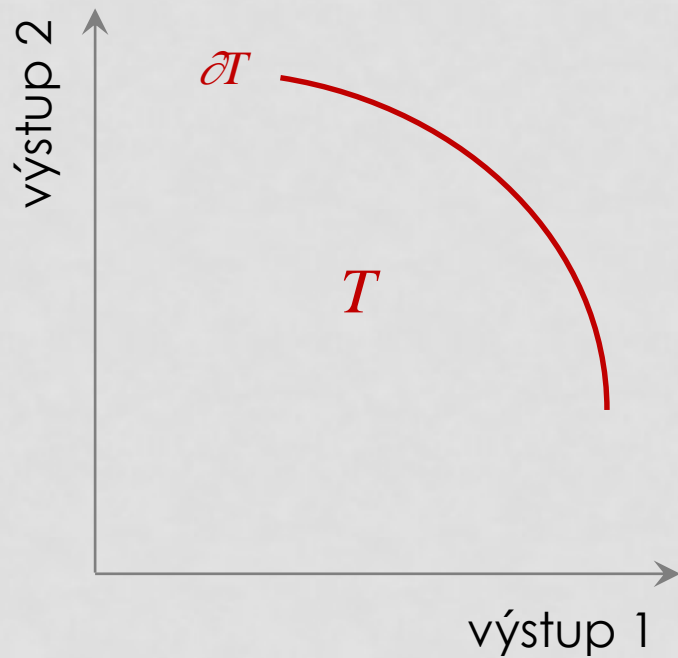
<http://www.dailyblogtips.com/effective-vs-efficient-difference/> + diskusia

# Meranie efektívnosti: produkčná množina a produkčná hranica

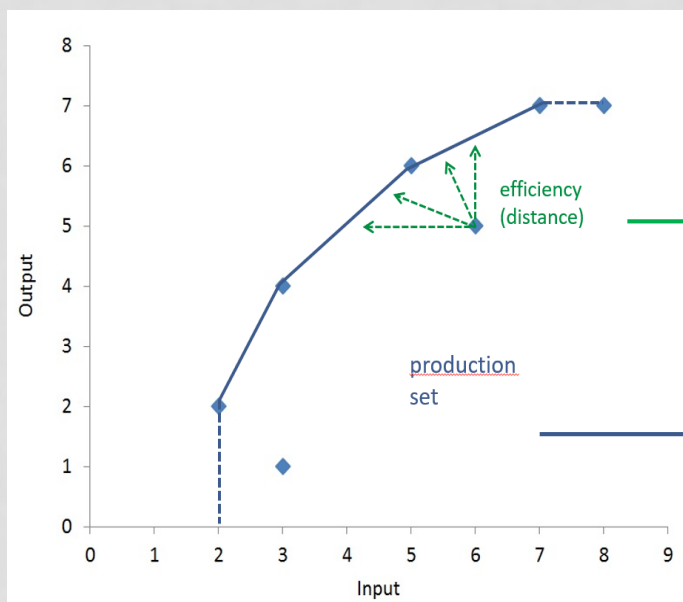




# Produkční množina a produkční hranice



$$\text{CRS: } f(kx_1, kx_2) = ky$$

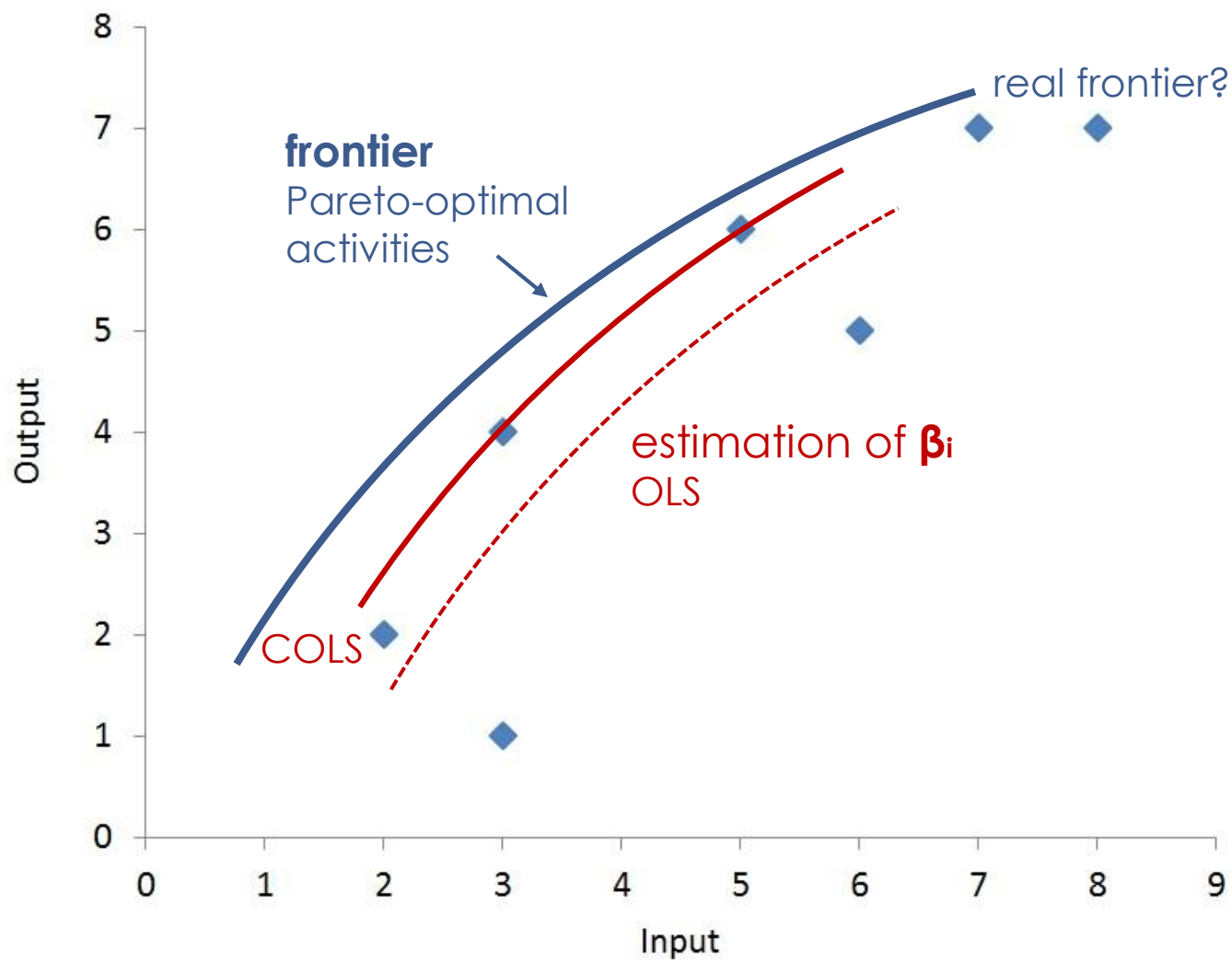


[?]  
meranie vzdialenosti

[?]  
analytický popis  
množiny / hranice

# **Technologická hranica: odhad**

## Parametrics vs non-parametrics



# Usporiadanie údajov – dátové matice

$\mathbf{x}_j$  a  $\mathbf{y}_j$  – (nezáporné) vstupy a výstupy DMU $_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$

$x_{ij} \rightarrow i$ -tý input použitý  $j$ -tou DMU  
[ $i = 1, 2, \dots, m$ ]

$y_{rj} \rightarrow r$ -tý output vyprodukovaný  $j$ -tou DMU  
[ $r = 1, 2, \dots, s$ ]

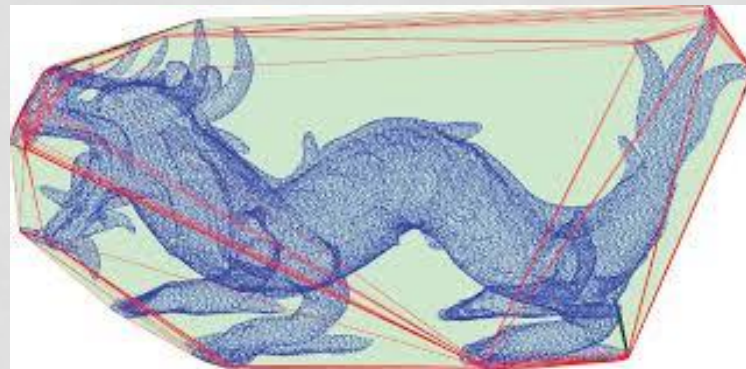
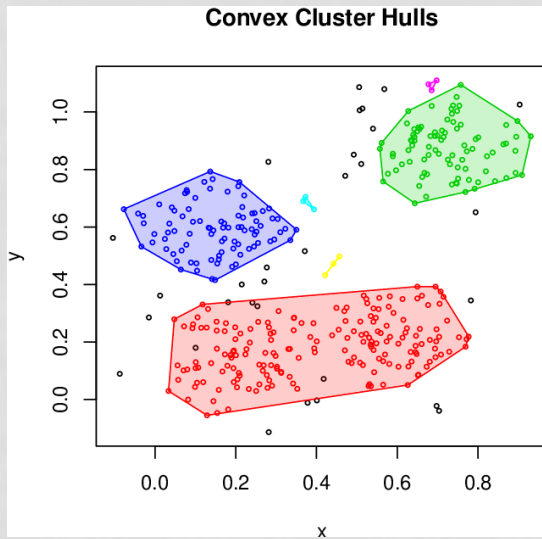
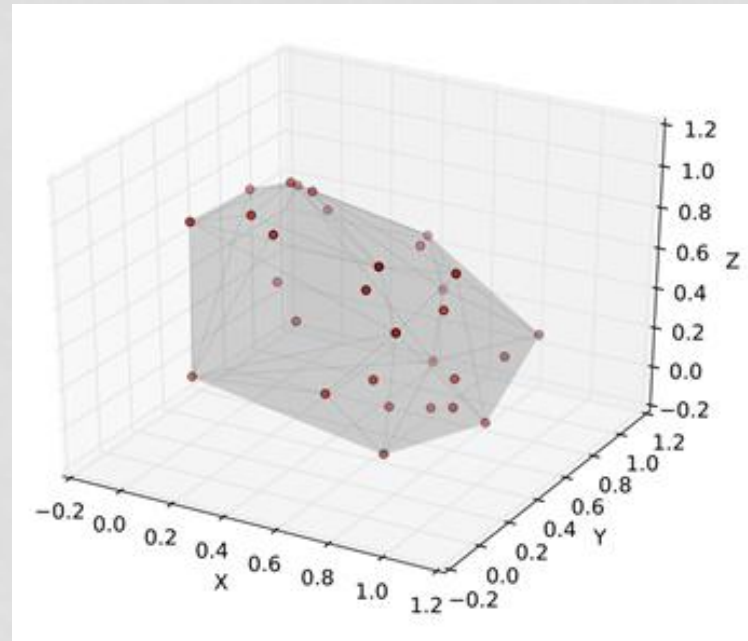
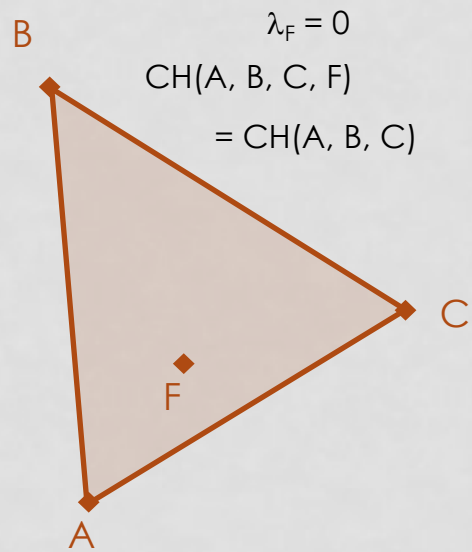
$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ y_{s1} & y_{s2} & \dots & y_{sn} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}_4^T$ 

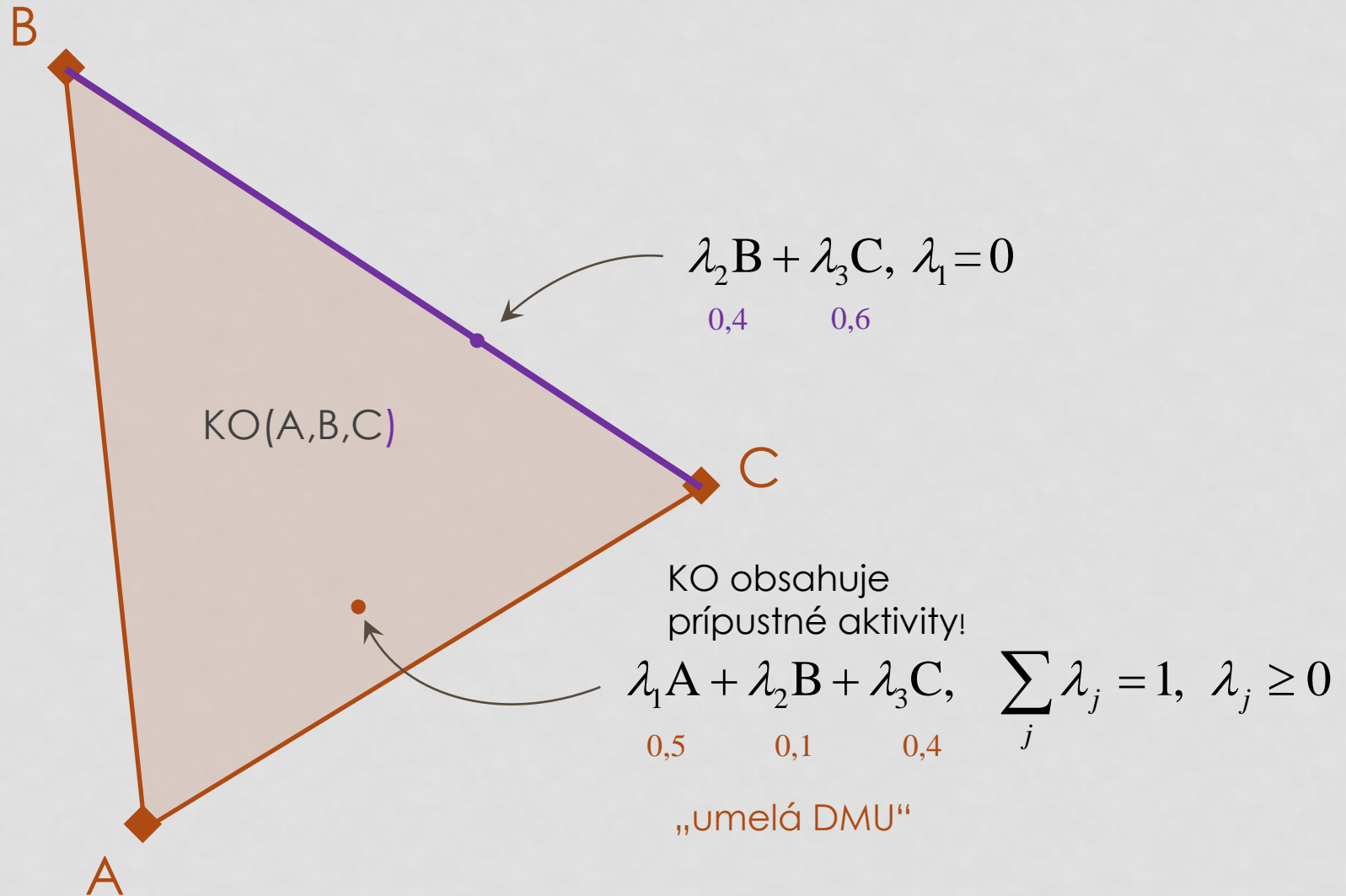
DMU	inputs			outputs (expenditures)			
	K	L	Energy	Enviro	Housing	Health	Education
Belgium	855,0	4,5	35,8	3,6	1,4	31,5	26,3
Bulgaria	277,0	3,6	9,5	0,4	1,0	2,5	1,8
Czech Republic	825,2	5,1	24,2	1,8	1,1	12,7	8,2
Denmark	421,1	2,8	13,9	1,2	0,7	23,3	19,1
Germany	7558,0	40,6	212,1	18,5	11,6	217,2	127,4
Estonia	79,3	0,6	2,8	0,1	0,1	1,1	1,2
Ireland	437,4	1,8	11,2	1,0	1,5	14,6	9,4
Greece	889,0	4,7	16,5	2,6	0,4	8,0	7,6
Spain	3893,8	18,9	80,5	9,3	5,2	66,6	44,0
France	5773,7	26,8	144,1	21,9	23,3	178,2	119,2
Italy	4926,5	24,7	116,4	15,9	10,1	117,0	65,2
Cyprus	52,4	0,4	1,7	0,1	0,3	0,5	1,0
Latvia	104,6	0,9	3,8	0,2	0,2	0,9	1,5
Lithuania	136,4	1,3	4,9	0,2	0,1	2,2	2,0
Luxembourg	74,2	0,4	4,0	0,6	0,3	2,3	2,7
Hungary	562,4	4,1	17,3	1,3	1,2	5,8	5,7
Malta	27,0	0,2	0,6	0,2	0,0	0,5	0,5
Netherlands	1579,3	8,6	48,5	9,7	2,2	54,1	36,8
Austria	890,2	4,1	27,4	1,4	1,1	27,3	16,9
Poland	1541,9	15,9	62,3	2,6	3,0	20,0	22,4
Portugal	609,9	4,9	16,0	0,7	0,9	11,1	10,7
Romania	883,6	9,0	21,9	1,6	2,3	6,7	4,9
Slovenia	146,4	1,0	4,7	0,4	0,2	2,6	2,1
Slovakia	314,2	2,2	10,1	0,8	0,7	5,6	3,3
Finland	391,8	2,5	24,2	0,5	0,9	15,0	13,1
Sweden	901,3	4,5	31,8	1,3	3,3	31,1	29,2
United Kingdom	4557,5	29,0	131,4	20,3	12,5	196,6	132,0
Norway	632,1	2,6	18,7	3,0	2,6	29,2	19,0

 $\mathbf{y}_{11}^T$  $\mathbf{X}^T$  $\mathbf{Y}^T$

## Konvexný obal v 3D



# Konvexný obal a prípustné aktivity

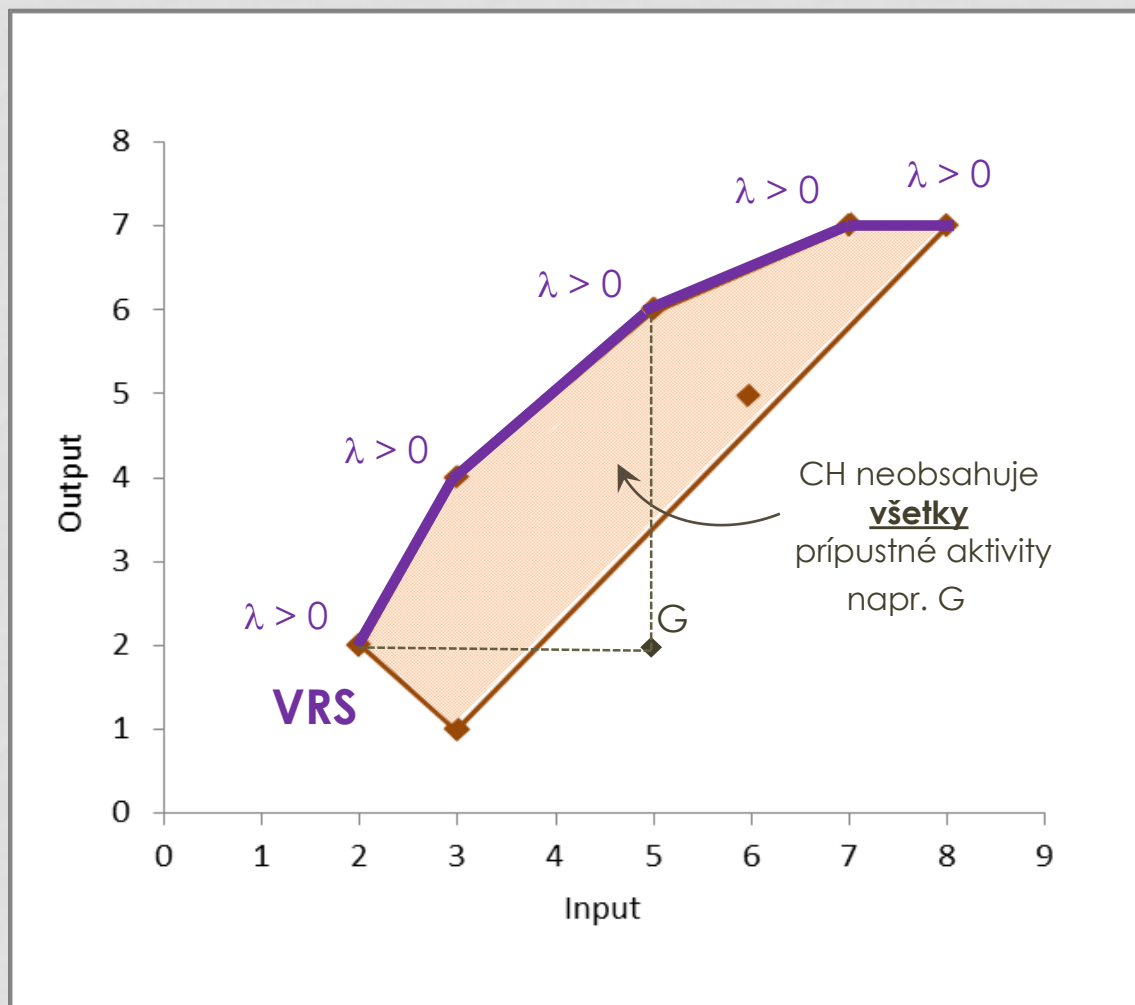




Nie je problém vypočítať CH  
viacdimenziálnych objektov

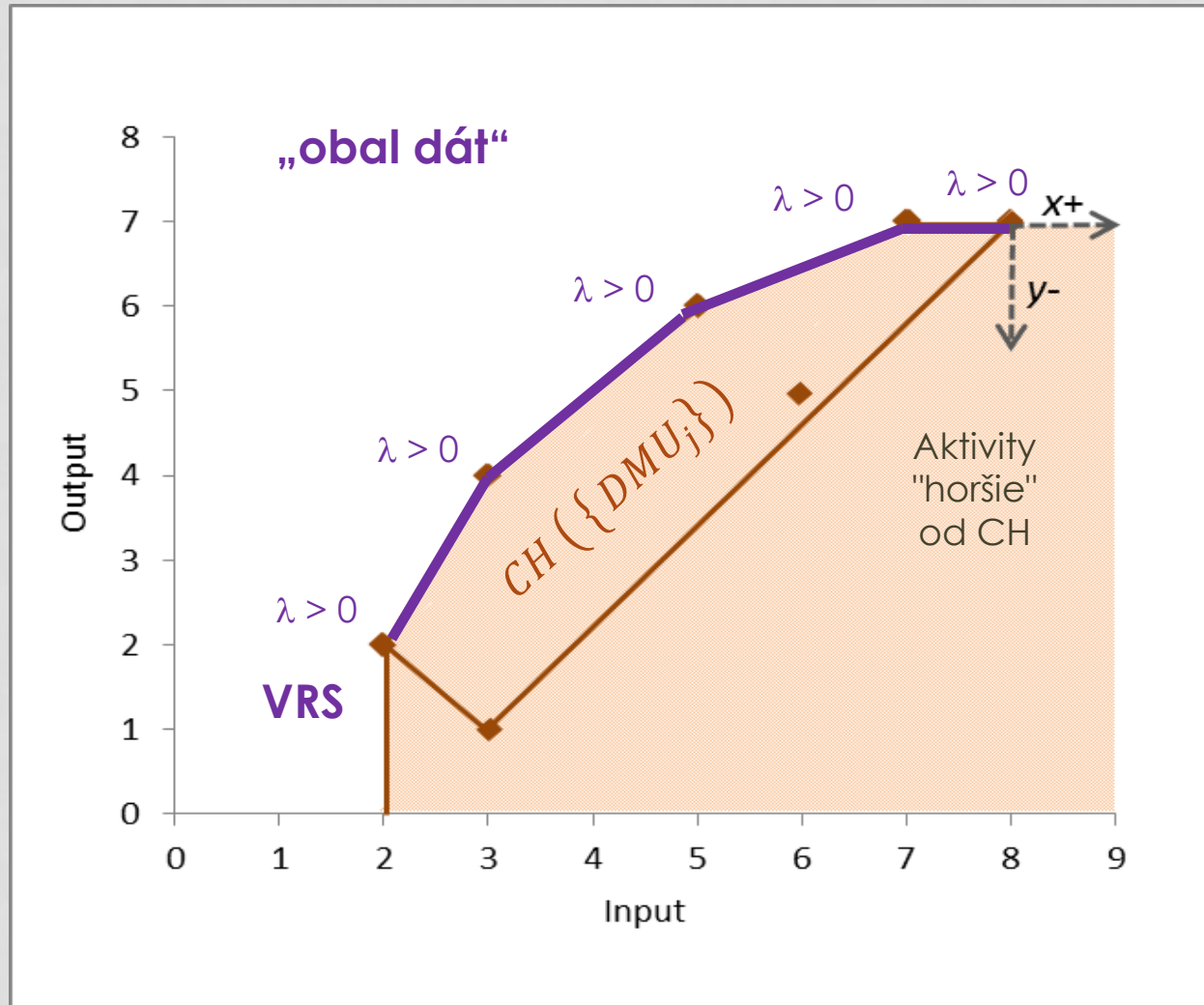
DMU	(I1)K	(I2)L	(I3) Energy	(O1) Environment
1 Belgium	855,0	4,5	35,8	3,6
2 Bulgaria	277,0	3,6	9,5	0,4
3 Czech Republic	825,2	5,1	24,2	1,8
4 Denmark	421,1	2,8	13,9	1,2
5 Germany	7558,0	40,6	212,1	18,5
6 Estonia	79,3	0,6	2,8	0,1
7 Ireland	437,4	1,8	11,2	1,0
8 Greece	889,0	4,7	16,5	2,6
9 Spain	3893,8	18,9	80,5	9,3
10 France	5773,7	26,8	144,1	21,9
11 Italy	4926,5	24,7	116,4	15,9
12 Cyprus	52,4	0,4	1,7	0,1
13 Latvia	104,6	0,9	3,8	0,2
14 Lithuania	136,4	1,3	4,9	0,2
15 Luxembourg	74,2	0,4	4,0	0,6
16 Hungary	562,4	4,1	17,3	1,3
17 Malta	27,0	0,2	0,6	0,2
18 Netherlands	1579,3	8,6	48,5	9,7
19 Austria	890,2	4,1	27,4	1,4
20 Poland	1541,9	15,9	62,3	2,6
21 Portugal	609,9	4,9	16,0	0,7
22 Romania	883,6	9,0	21,9	1,6
23 Slovenia	146,4	1,0	4,7	0,4
24 Slovakia	314,2	2,2	10,1	0,8
25 Finland	391,8	2,5	24,2	0,5
26 Sweden	901,3	4,5	31,8	1,3
27 United Kingdom	4557,5	29,0	131,4	20,3
28 Norway	632,1	2,6	18,7	3,0

## Stavebné prvky hranice produkčných možností



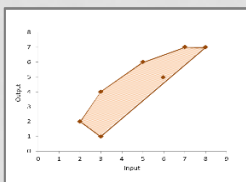
Potrebujeme celú množinu produkčných možností →

# Technológia bez CRS (M-VRS)



# Zovšeobecnenie pre viac vstupov a viac výstupov

## Konvexný obal

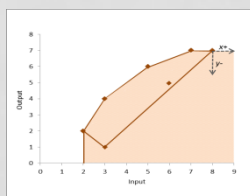


$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j = y_r \quad (r = 1, 2, \dots, s)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

## M-VRS



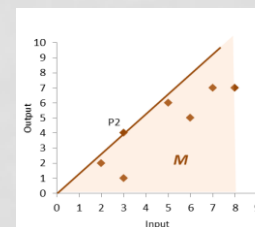
$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_i$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq y_r$$

~~$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$~~

?

## M-CRS



# Základný CCR model – „obalový“ prístup

všeobecne pre vektor  $\mathbf{x}$  vstupov a  $\mathbf{y}$  výstupov a CRS

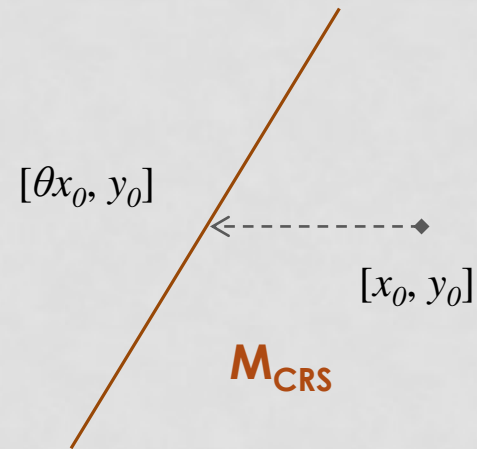
$\text{DMU}_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ , vstupná orientácia  $\rightarrow$

*max* možná radiálna **redukcia všetkých vstupov** ( $\mathbf{x}_0 \rightarrow \theta^* \mathbf{x}_0$ )

$$\min \theta$$

tak, aby výslednú kombináciu bolo technologicky možné vyrobiť

$$(\theta \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in M_{\text{CRS}}$$



radiálnosť:  $\theta \mathbf{x}_0 = (\theta x_{10}, \theta x_{20}, \dots, \theta x_{m0})^T$

**všetky vstupy rovnakou mierou  $\theta$**

## CCR-I obalový přístup (LP)

$$\min_{\theta, \lambda} \quad \theta$$

$$\text{s.t.} \quad \theta x_{i0} - \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - y_{r0} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad (r = 1, 2, \dots, s)$$

## CCR - I

$$\begin{array}{ll}\min_{\theta, \lambda} & \theta \\ \text{s.t.} & \theta \mathbf{x}_0 - \mathbf{X}\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{Y}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{y}_0 \geq \mathbf{0} \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

# Charakteristika modelu

- početné vstupy, početné výstupy
- $\emptyset$  predpoklad o vzťahu vstupov a výstupov
- kvantita vo fyzických jednotkách
- benchmarky, projekcie
- nemodeluje proces
- $\emptyset$  stochastika  $\rightarrow$   $\emptyset$  testovanie
- relatívnosť hodnotenia

# Konštrukcia modelu

- teória, definícia technológie
- výber premenných, transformácia údajov
- „stupne voľnosti“:  $n > 3(m+s)$
- typ modelu
- orientácia
- výnosy z rozsahu
- dodatočné informácie →  
rozšírenia, modifikácie modelu

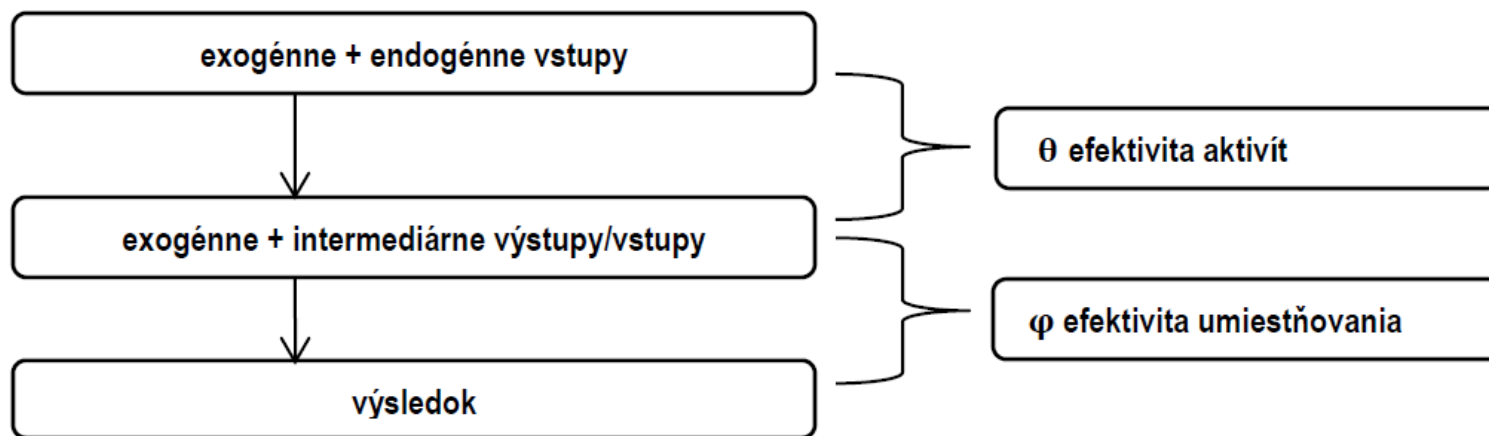


## Príklady využitia DEA (SR)

- Revízia výdavkov FS (2016)
- Revízia výdavkov ÚP (2017)
- Efektívnosť nemocníc (IZP, Frisová, 2010)
- Regionálne školstvo (Šiškovič, 2013)  
[bootstrapping]
- Environmentálne benefity spracovania  
odpadových vôd (IEP, 2018)  
[tieňové ceny, DDF]

- Revízia výdavkov ÚP (2017)

### Teoretický model hodnotenia operačnej efektivity



#DMUs (pobočky) = 46

## Vstupy:

### Exogénne:

- U      priemerný počet registrovaných UoZ
- V      priemerný počet registrovaných voľných pracovných miest
- z<sub>1</sub>      podiel nízkokvalifikovaných na UoZ
- z<sub>2</sub>      podiel dlhodobo nezamestnaných na UoZ

### Endogénne:

- w<sub>1</sub>      počet zamestnancov služieb zamestnanosti<sup>85</sup>
- w<sub>2</sub>      výdavky na nástroje AOTP priamo započítateľné úradu práce
- w<sub>3</sub>      výdavky na bežný chod úradu práce (výdavky na tovary a služby)

### Intermediárne výstupy/vstupy:

- $y_1$  počet individuálnych informačných poradenských služieb IPS (§42) + počet skupinových informačných poradenských služieb IPS  $\times 20^{86}$  (§42)
- $y_2$  počet odborných poradenských služieb OPS (§43)
- $y_3$  počet odporúčaní na voľné pracovné miesta
- $y_4$  počet osôb, ktoré sa zúčastňujú vzdelávacích programov (§46 ods. 4, §47, 54-REPAS)
- $y_5$  počet aktivizovaných UoZ prostredníctvom AOTP zameraných na zvyšovanie zamestnatelnosti a zamestnanosti okrem vzdelávania (§ 43, 49, 50, 50c, 50j, 51, 52, 52a, 52a, 54, 54-REPAS, 56, 57)
- $y_6$  počet všetkých aktivizovaných osôb prostredníctvom AOTP zameraných na zvyšovanie zamestnatelnosti a zamestnanosti a udržanie existujúcich pracovných miest (§§ 43, 46 ods. 4, 47, 49, 50, 50a, 50c, 50j, 51, 52<sup>87</sup>, 52a, 52a, 53, 53a, 54, 54-REPAS, 56, 56a, 57, 59, 60)

### Výsledky:

- $Y$  priemerný počet vyradení z evidencie UoZ z dôvodu umiestnenia na trhu práce

	Vstupy	Výstupy
Efektivita aktivít	<i>index (nediskrecionárny vstup), <math>w_1, w_2, w_3</math></i>	$y_1, y_2, y_6,$
Efektivita účinnosti	<i>index (nediskrecionárny vstup), <math>y_1, y_2, y_3, y_4, y_5</math></i>	$Y$

- Analýza prevádzky FS (2016)

Model 1 – celková administrácia, správa daní (DEA BCC)

- Input – počet zamestnancov odboru správy daní
- Output – súčet vydaných a podaných dokumentov<sup>29</sup>

Model 2 – správa podaných daňových dokumentov (DEA BCC)

- Input – počet zamestnancov pod profesiou správca II
- Output – celkový počet podaných dokumentov<sup>30</sup>

Model 3 – celková administrácia, správa daní (inputovo orientovaný Malmquistov TFP index)

- Input – počet zamestnancov odboru správy daní
- Output – súčet vydaných a podaných dokumentov

Model 10 – stály daňový dozor, DEA BCC/Malmquistov index

- Input – počet príslušných colníkov
- Output – počet hodín stáleho daňového dozoru

Model 11 – miestne zisťovania, DEA BCC/Malmquistov index (output metóda)

- Input – počet príslušných colníkov
- Output – počet vykonaných miestnych zisťovaní

Tabuľka 14: Model 1, DEA BCC model, inputová orientácia

Rok	2012			2013			2014		
Typ efektivity	CRS_TE	VRS_TE	SCALE	CRS_TE	VRS_TE	SCALE	CRS_TE	VRS_TE	SCALE
<b>DÚ BA</b>	0,92	1,00	0,92	0,89	1,00	0,89	0,90	1,00	0,90
<b>DÚ TT</b>	0,96	1,00	0,96	0,97	0,98	0,99	0,98	1,00	0,98
<b>DÚ TN</b>	0,95	1,00	0,95	0,98	1,00	0,98	0,92	1,00	0,92
<b>DÚ NR</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	0,98	0,98	0,99	0,97	0,98	0,99
<b>DÚ ZA</b>	0,90	0,90	0,99	0,94	0,96	0,98	0,93	0,94	0,98
<b>DÚ BB</b>	0,90	0,93	0,97	0,91	0,92	0,99	0,88	0,91	0,98
<b>DÚ PO</b>	0,94	0,96	0,98	1,00	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>
<b>DÚ KE</b>	0,89	0,91	0,97	0,92	0,92	1,00	0,92	0,93	0,99
<b>Priemer</b>	0,93	<b>0,96</b>	0,97	0,95	<b>0,97</b>	0,98	0,94	<b>0,97</b>	0,97

Zdroj: FS SR, IFP

- Technická efektívnosť nemocníc (Frisová, 2010)

L K Y	lekári	391	3	77
	sestry	1 010	11	238
	počet postelí	1 616	50	438
	ošetrovacie dni	398 433	5 406	105 060
	hospitalizácie	47 761	679	14 541

#DMUs (nemocnice) = 46

2009	CCR-I	lekári	81	0	10
		sestry	210	0	31
		priemerný počet postelí	337	0	56
	BCC-I	lekári	23	0	4
		sestry	72	0	14
		priemerný počet postelí	118	0	26

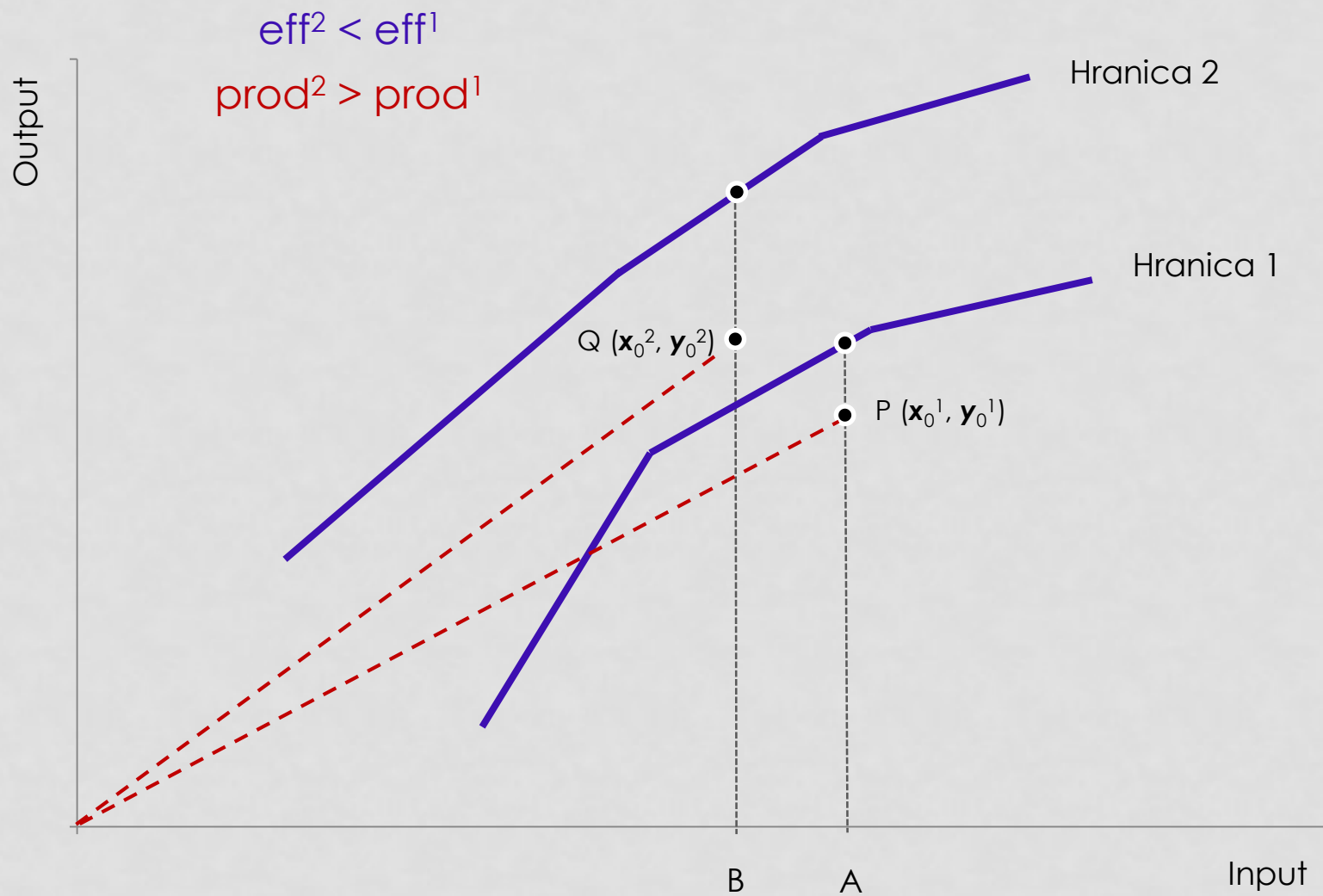
adjustment =  
skutočnosť - benchmark

	2005		2006		2007		2008		2009	
Interval	CCR-I	BCC-I	CCR-I	BCC-I	CCR-I	BCC-I	CCR-I	BCC-I	CCR-I	BCC-I
100 %	5	13	5	18	12	20	10	22	10	19
99,9 % – 95,0 %	7	11	9	6	8	7	4	4	6	6
94,9 % – 90,0 %	10	8	6	10	7	5	8	7	3	6
89,9 % – 80,0 %	16	7	13	7	14	14	17	11	18	11
79,9 % – 70,0 %	3	3	13	6	6	1	7	3	9	5
69,9 % – 60,0 %	2	2	1	0	0	0	1	0	1	0
59,9 % – 50,0 %	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
49,0 % – 0 %	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0

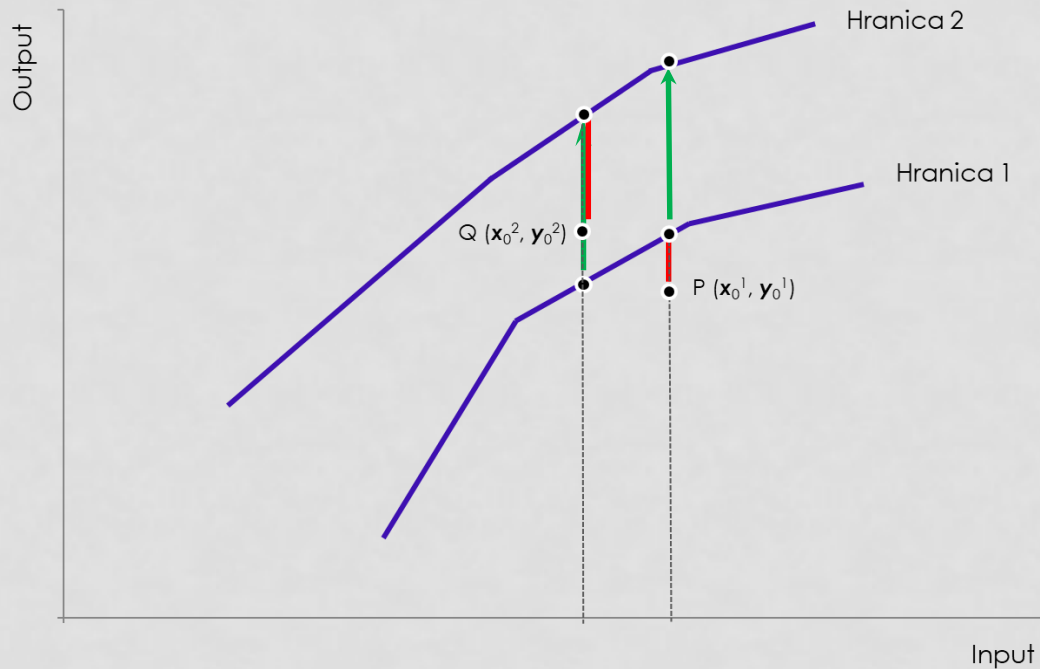
Zdroj: Health Policy Institute, 2010



# Medzičasová analýza



# Malmquistov index produktivity [TFP]



$$MI = C \times F = \frac{\delta^2(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)^2}{\delta^1(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)^1} \left[ \frac{\delta^1(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)^1}{\delta^2(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)^1} \times \frac{\delta^1(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)^2}{\delta^2(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)^2} \right]^{1/2}$$

$$MI = \text{Catch-up effect} \times \text{Frontier-shift effect}$$

# EFEKTÍVNOST

$(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \mathbf{X}, \mathbf{Y})$

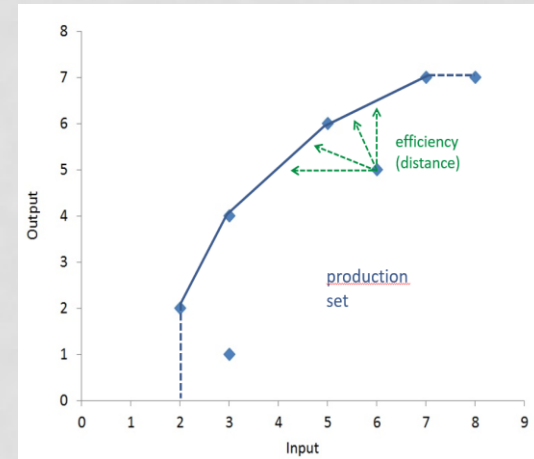
$$\frac{\text{"výstupy"}}{\text{"vstupy"}} = \frac{\sum_{r=1}^S \mathbf{y}_{r0} \mu_r}{\sum_{i=1}^m \mathbf{x}_{i0} \nu_i}$$

$$\frac{\mathbf{u}^T \mathbf{Y}}{\mathbf{v}^T \mathbf{X}} \leq \mathbf{1}^T$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{u}^T \mathbf{y}_0 \\ \text{s.t.} \quad & -\mathbf{v}^T \mathbf{X} + \mathbf{u}^T \mathbf{Y} \leq \mathbf{0}^T \\ & \mathbf{v}^T \mathbf{x}_0 = 1 \\ & \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

dualita

$$\begin{aligned} \min_{\theta, \lambda} \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & \theta \mathbf{x}_0 - \mathbf{X} \lambda \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{Y} \lambda - \mathbf{y}_0 \geq \mathbf{0} \\ & \lambda \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$



“MULTIPLIKÁTORÝ”

“OBAL”

# Výpočtové aspekty

- optimalizácia, LP: Excel, GAMS, Matlab, Stata, R
- korelácia medzi premennými
- multikolinearita: PCA, faktory, ...
- nulové, záporné údaje
- neistota, analýza citlivosti
- outliery

# **Modifikácie, rozšírenia**

- nekontrolovateľné vstupy, výstupy
- neželateľné výstupy
- superefektívnosť
- obmedzené multiplikátory
- kompozitné indikátory
- nákladová efektívnosť
- 2nd stage: regresná analýza

# ĎAKUJEM ZA POZORNOSŤ!

Otázky, komentáre..?

[eduard.nezinsky@euba.sk](mailto:eduard.nezinsky@euba.sk)  
[eduard.nezinsky@savba.sk](mailto:eduard.nezinsky@savba.sk)

